



Matemáticas. Problema 1:

1. Encuentre la distancia mínima del origen a la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$. [3 puntos]

2. Calcule la siguiente integral de línea, entre los puntos $P_1 = (0,1)$ y $P_2 = (1,2)$

$$\int_{P_1}^{P_2} (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

2. a) Recta que une los puntos P_1 y P_2 .
2. b) Recta que une los puntos P_1 a $(1,1)$ y luego recta que une los puntos $(1,1)$ a P_2 .
2. c) De la parábola definida por $x = t$, $y = t^2 + 1$.

[3 puntos]

3. Sea el campo vectorial $\vec{A} = 3y\hat{i} - xz\hat{j} + yz^2\hat{k}$ y la superficie S del paraboloides definido por $2z = x^2 + y^2$ y limitada por $z = 2$.

3. a) Calcule la circulación del campo a lo largo del contorno del paraboloides en $z = 2$.
3. b) Calcule el flujo del campo a través de S , comprobando que se cumple el teorema de Stokes.

[4 puntos]



Matemáticas. Problema 2:

1. Determine las soluciones de los siguientes problemas de valores iniciales, en los que $y = y(x)$:

1. a) $x + y^2 - 2xyy' = 0$, $y(e) = 0$

1. b) $y' \cos x + y \sin x - \cos^3 x = 0$, $y(0) = -1$

[5 puntos]

2. Calcule la solución periódica estacionaria de

$$x'' + 10x = F(t)$$

donde $F(t)$ es la función de período 4 definida como $F(t) = 5t$ para $-2 < t < 2$, cuya serie de Fourier es:

$$F(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n t}{2}$$

[5 puntos]



Matemáticas. Problema 3:

Sean las dos series de datos de los observatorios A y B recogidas en la siguiente tabla, correspondientes al número de tormentas en septiembre, a lo largo de 15 años.

A	3	2	1	1	3	3	4	3	0	2	3	3	3	3	5
B	5	3	4	4	5	6	8	8	5	3	5	6	7	9	6

1. Calcule la probabilidad de los sucesos siguientes:

1.a) La suma del número de tormentas en los dos lugares en septiembre, sea al menos 10.

1.b) La suma del número de tormentas en los dos lugares en septiembre, sea al menos 10, condicionado a que el número en B exceda al número en A por al menos 2 tormentas.

[2 puntos]

2. Considere la hipótesis H_0 de que las series A y B están incorrelacionadas. Contraste H_0 al 5% de nivel de significación sabiendo que bajo H_0 , el coeficiente de correlación entre dos series de N valores tiene aproximadamente distribución normal de media 0 y desviación estándar $N^{-1/2}$.

[2 puntos]

3. Para el número de tormentas en septiembre en A , estime los parámetros de las distribuciones binomial, Poisson y normal por algún método. **[2 puntos]**

4. Calcule con las distribuciones binomial y Poisson obtenidas en el punto 3, la probabilidad de que en A en septiembre, se den como máximo 2 tormentas. **[2 puntos]**

5. Para la serie A , considere las dos hipótesis H_1 y H_2 refereridas al parámetro λ de la distribución de Poisson ajustada a la serie:

$$H_1: \lambda = 1.5$$

$$H_2: \lambda = 4.0$$

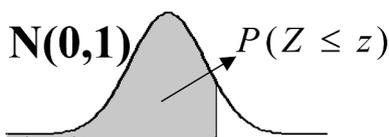
Decídase por una de las dos hipótesis comparando la función de verosimilitud de los datos bajo H_1 y H_2 .

[2 puntos]



TERCER EJERCICIO, PARTE A

TABLA NORMAL ESTÁNDAR



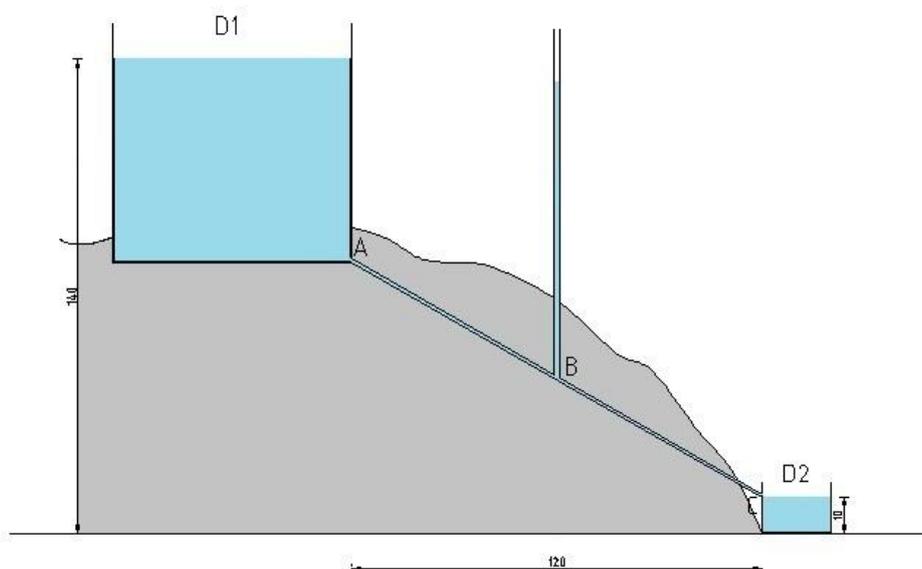
Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2,8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2,9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3,0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990



Física. Problema 1:

Para satisfacer el suministro de agua de una finca, un agricultor cuenta con dos depósitos D_1 y D_2 situados a distinta altura, de modo que sus niveles superiores se encuentran permanentemente a 140 y 10m sobre el nivel de la finca, respectivamente (Figura). Ambos depósitos se encuentran comunicados por una tubería inclinada un ángulo de 30° y cuya sección en el punto C (entrada del depósito D_2) es el 10% de la sección en los puntos A (salida del depósito D_1) y B (punto medio de la tubería). La tubería tiene instalada un piezómetro vertical en su punto medio (punto B). Conociendo que la distancia horizontal que separa a los depósitos es de 120m. Determine:

1. La velocidad del agua en los puntos A y C, suponiendo que no hay pérdidas en la tubería. **[2.5 puntos]**
2. La altura que alcanzará el agua en el piezómetro, suponiendo que no hay pérdidas en la tubería. **[2.5 puntos]**
3. El agricultor realiza una medida de la columna de agua en el piezómetro y obtiene un valor de 90m. ¿Qué pérdidas por unidad de longitud tiene la tubería que une los dos depósitos? Supóngase que las pérdidas por unidad de longitud a lo largo de la tubería son constantes. **[2.5 puntos]**
4. Si con el objetivo de generar energía el agricultor decide instalar una turbina en la entrada del depósito D_2 (punto C) y ésta provoca una pérdida de presión equivalente a 120m de columna de agua, determinar la velocidad a la salida de la turbina. **[2.5 puntos]**





Física. Problema 2:

Se considera un sistema cerrado constituido por dos moles de gas monoatómico ($\gamma = 5/3$) que evolucionan a lo largo de un ciclo de la siguiente manera:

Estado 1: Se parte de una presión de 101325 Pa, y volumen igual a 0,5 l.

Estado 2: Posteriormente, se cuadruplica el volumen manteniéndose la presión constante.

Estado 3: Más tarde, se registra una temperatura de $-270,1^\circ\text{C}$ y un volumen de 2 l.

Finalmente, retorna a la situación inicial.

Se pide:

1. Calcular la temperatura en los estados 1 y 2. **[1 punto]**
2. Hallar la presión en el estado 3 y representar gráficamente el ciclo seguido por el gas.

[1 punto]

3. Calcular ΔU , ΔS , ΔQ , ΔW en la transformación de los estados 1 \rightarrow 2. **[2 puntos]**
4. Calcular ΔU , ΔS , ΔQ , ΔW en la transformación de los estados 2 \rightarrow 3. **[2 puntos]**
5. Calcular ΔU , ΔS , ΔQ , ΔW en la transformación de los estados 3 \rightarrow 1. **[2 puntos]**
6. Hallar el rendimiento del ciclo. **[1 punto]**
7. La máquina debe producir una potencia de 1 kW, ¿cuántos ciclos debe realizar por minuto?

[1 punto]

Nota aclaratoria: Considerar $W > 0$ si el trabajo es realizado por el sistema y $Q > 0$ si el calor es absorbido por el sistema.



Física. Problema 3:

Una esfera conductora maciza de radio R , descargada, se rodea de una corona esférica maciza concéntrica de radios $2R$ y $3R$, también conductora y con carga Q . Calcule:

1. El campo eléctrico en las distintas regiones del espacio. **[1 punto]**
2. El potencial eléctrico en las distintas regiones del espacio. **[1 punto]**

Si en estas condiciones, se conecta la esfera interior a tierra, calcule:

3. La nueva distribución de cargas que aparece sobre las esferas y los potenciales, en las distintas regiones del espacio. **[1 punto]**
4. El campo eléctrico en las distintas regiones del espacio. **[1 punto]**
5. La variación de energía electrostática, al conectar a tierra la esfera interior. **[2 puntos]**

Supóngase ahora que se desconecta la esfera interior de tierra, y se carga con una carga q . En estas nuevas condiciones se conectan la esfera y la corona mediante un hilo conductor. Calcule:

6. El La carga en cada una de las superficies esféricas. **[2 puntos]**
7. La energía electrostática. **[2 puntos]**

DILIGENCIA: La presente documentación se publica con fecha 9 de febrero de 2017